القسم : رياضيات/جبر   السنة : الرابعة   المادة : نظرية الشبكات   المحاضرة : الثالثة

بسهولة يمكن أن نستنتج أن كل مجموعة جزئية منتهية غير خالية من نصف شبكة عليا تملك حداً أعلى أصغرياً، نتيجة مشابهة من أجل نصف الشبكة الدنيا.

أي أنه من أجل أي مجموعة جزئية منتهية غير خالية من نصف شبكة دنيا تملك حداً أدنى أعظمياً.

مبرهنة:

لتكن E مجموعة مزودة بقانون التشكيل الداخلي $x \vee y$ والذي يحقق الخواص: الجامعية، التبديلية، التجميعية عندئذٍ توجد علاقة ترتيب وحيدة $\leq$ على E بحيث تكون E نصف شبكة عليا مرتبة ومن أجل كل العنصرين x, y من E فإن:

$$\sup_E \{x, y\} = x \vee y$$

البرهان:

١. وجدت علاقة ترتيب في E معرفة بالشكل:

$x \leq y$ إذا وفقط إذا كان $x \vee y = y$ (مشترك وحيد) لنبرهن ذلك

لتكن R علاقة معرفة بالشكل التالي:

$$x \vee y = y \Leftrightarrow x R y$$

لنبرهن أن R علاقة ترتيب

* R انعكاسية: لأنه $x R x \Leftrightarrow x \vee x = x$ بالفرض

* R متعدية. لأنه إذا فرضنا $x R y$, $y R z$ فإن $x \vee y = z$ و $y \vee z = z$

$$\Rightarrow x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$$

أي أن:

$$x R z \Leftrightarrow x \vee z = z$$

* R تخالفية لأنه إذا فرضنا $x R y$ و $y R x$ فإن

$x \vee y = y$ و $y \vee x = x$

ولكن الخاصة التبديلية محققة فرضاً فإن:

$x = y$ ومنه $x \vee y = y \vee x$

بالتالي فإن R علاقة ترتيب على E ونرمز لها بـ $\leq$

لنبرهن أن $(E, \leq)$ هي نصف شبكة عليا؟

ليكن $x,y \in E$ فإن $x \leq x \vee y$ وذلك لأن:

$$x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y \Leftrightarrow x R (x \vee y)$$

$$\Leftrightarrow x \leq x \vee y$$

كذلك $x \vee y \geq y$ وذلك لأن

$$y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y) = x \vee y$$

$$\Rightarrow y R (x \vee y) \Leftrightarrow y \leq x \vee y$$

نستنتج أن $x \vee y$ هو حد أعلى للمجموعة $\{x,y\}$ في E

نبرهن الآن أنه أصغرها

ليكن M حداً أعلى آخر للمجموعة $\{x,y\}$ في E فإن

$$(x \vee y) \vee M = x \vee (y \vee M) = x \vee M \quad (M \geq y \text{ لأن})$$

$$= M \quad (x \leq M \text{ لأن})$$

$$\Leftrightarrow x \vee y \leq M$$

وبالتالي فإن $x \vee y$ هو أصغر حد أعلى للمجموعة $\{x,y\}$ أي أن $(E,\leq)$ هي نصف شبكة عليا

ملاحظة:

① يمكن البرهان أيضاً أنه إذا كانت التشكيل الداخلي $x \wedge y$ والذي يحقق الخواص الجامعية والتبديلية، التجميعية يمكن أن يعرف بناء نصف شبكة دنيا وهي مع علاقة الترتيب:

$$x \wedge y = x \Leftrightarrow x \leq y$$

بحيث يكون $x \wedge y = \inf\{x,y\}$

② كذلك فإن إذا كان $\top$ تشكيل داخلي $x \top y$ يحقق الخواص الجامعية، التبديلية، التجميعية على المجموعة E يمكن أن يعرف علاقتي ترتيب:

• $x \leq_1 y$ والمعرفة بالشكل: $x \top y = y$

وتكون عندها $(E,\leq_1)$ نصف شبكة عليا $x \top y = x \vee y$

• $x \leq_2 y$ المعرفة بالشكل $x = x \top y$ وتكون عندها $(E,\leq_2)$ نصف شبكة دنيا

$$x \top y = x \wedge y$$

حالة الشبكة :

لتكن $(E, \leq)$ شبكة مزودة بقانوني التشكيل الداخليين $x \vee y$ و $x \wedge y$ فإن هذين يحققان الخواص التالية : الإدماجية ، التبديلية ، التجميعية . هذين القانونين في الحالة العامة مختلفان (باستثناء الحالة التي يعرف فيها علاقة الترتيب بالمساواة) ولكنهما يعرفان نفس علاقة الترتيب أي أن :

$$x \vee y = y \Leftrightarrow x \leq y$$

$$x \wedge y = x \Leftrightarrow x \leq y$$

وبالعكس :

إذا كانت E مزودة بقانوني التشكيل داخليين $\top$ و $\perp$ ويحققان الخواص الإدماجية التبديلية ، التجميعية فإن كل من هذين القانونين يعرف علاقة ترتيب :

نحصل شبكة عليا $(E, \leq_1) \Leftrightarrow x \top y = y \Leftrightarrow x \leq_1 y$

نحصل شبكة دنيا $(E, \leq_2) \Leftrightarrow x \perp y = x \Leftrightarrow x \leq_2 y$

لكن في الحالة العامة E لا تكون شبكة لأن هاتين العلاقتين يكونان مختلفتين

مثال :

نعرف على N^* قانوني التشكيل :

$$x \top y = \max(x, y)$$

$$x \perp y = \gcd(x, y)$$

علاقتي الترتيب الموافقة لكل من قانوني التشكيل علاقة الترتيب العادي (بالنسبة للأولى) والقسمة (بالنسبة للثانية)

ملاحظة :

نلاحظ أنه إذا كانت $(E, \leq)$ شبكة فإنه من أجل أي عنصرين x, y من E فإن :

يمكن أن نكتب كذلك $x \wedge y \leq x \leq x \vee y$

$$x \vee (x \wedge y) = x \quad \text{و} \quad x \wedge (x \vee y) = x$$

هاتين المساواتين تدعيان بقانوني الامتصاص

مبرهنة :

لتكن E مجموعة مزودة بقانوني تشكيل داخليين $x \wedge y$ ، $x \vee y$ يحققان ما يلي

1) كل من قانوني التشكيل يحقق الخواص الإدماجية ، التبديلية ، التجميعية معاً

ج) تابعي الماصية تحقيق من أجل أي x, y من E أي أن

$x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$

البرهان:

حسب ما أخذناه سابقاً يكفي أن نبرهن أن علاقتي الترتيب:

$x \vee y = y \Leftrightarrow x \leq_1 y$

$x \wedge y = x \Leftrightarrow x \leq_2 y$ متكافئتان

نفرض أن $x \vee y = y \Leftrightarrow x \leq_1 y$

$\Rightarrow x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x \Leftrightarrow x \leq_2 y$

وبالعكس:

نفرض أن $x \wedge y = x \Leftrightarrow x \leq_2 y$

$\Rightarrow x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y \vee (x \wedge y) = y \vee (y \wedge x)$

$= y \Leftrightarrow x \leq_1 y$

أي أن لهما نفس علاقة الترتيب

مبرهنة:

إذا كانت $(E, \leq)$ شبكة:

. نفرض أن $a \leq b \Leftarrow$ من أجل أي x من E يكون

$a \wedge x \leq b \wedge x$ & $a \vee x \leq b \vee x$

. نفرض أن $a \leq b$ & $c \leq d \Leftarrow$

$a \wedge c \leq b \wedge d$ & $a \vee c \leq b \vee d$

البرهان

إذا كان $a \leq b$ فإن $a \wedge b = a$ & $a \vee b = b$

$(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = (a \wedge b) \wedge (x \wedge x) = (a \wedge b) \wedge x = a \wedge x$

$\Leftrightarrow a \wedge x \leq b \wedge x$

~~$a \vee x$~~

$(a \vee x) \vee (b \vee x) = (a \vee b) \vee (x \vee x) = b \vee x \Leftrightarrow a \vee x \leq b \vee x$

القسم : السنة : المادة : المحاضرة :

$a \wedge c \leq b \wedge d \;\Leftarrow \begin{cases} a \wedge c \leq b \wedge c \;\overset{\text{حسب 1}}{\Longleftarrow}\; c \in E \;\&\; a \leq b \\ b \wedge c \leq b \wedge d \;\overset{\text{حسب 1}}{\Longleftarrow}\; b \in E \;\&\; c \leq d \end{cases}$ لكن

$a \vee c \leq b \vee d \Leftarrow \begin{cases} a \vee c \leq b \vee c \;\overset{\text{حسب 1}}{\Longleftarrow}\; c \in E \;\&\; a \leq d \\ b \vee c \leq b \vee d \;\overset{\text{حسب 1}}{\Longleftarrow}\; b \in E \;\&\; c \leq d \end{cases}$ ولكن

انتهت الجزء 8